

Espressione in forma chiusa dello Stress Intensity Factor di piccole cricche tridimensionali sollecitate a trazione

P. Livieri, F. Segala

Nel presente lavoro, partendo dalla funzione peso di Oore-Burns, viene proposta un'equazione in forma chiusa per il calcolo dello Stress Intensity Factor (SIF) di cricche tridimensionali sollecitate da un campo di tensione uniforme. La soluzione è esatta nell'ambito di una teoria del primo ordine ed è stata ottenuta considerando una generica omotopia che trasforma la circonferenza di riferimento nella cricca in esame.

La soluzione è proposta in termini di serie di Fourier i cui coefficienti sono stati calcolati per via analitica. Dopo aver verificato la soddisfacente precisione della nuova formulazione rispetto alle soluzioni già note in letteratura, verrà mostrata una applicazione del calcolo dello SIF in piccoli difetti o inclusioni misurati in comuni getti realizzati in ghisa ed in lega di alluminio o in saldature tradizionali ad arco.

PAROLE CHIAVE:

mecc. frattura, difetti, modellazione

INTRODUZIONE

La tecnica della funzione peso è stata introdotta negli anni 70 da Bueckner [1] e Rice [2] come strumento per una rapida valutazione dello *Stress Intensity Factor* (SIF) pensato per evitare di modellare, nelle analisi numeriche, la presenza della cricca. Il computo dello SIF è relegato al calcolo di un integrale che vede come dominio di integrazione la zona interessata dalla cricca e come funzione integranda il prodotto fra il campo di tensione, valutato in assenza di cricca, e una opportuna funzione, definita *funzione peso*, dipendente dalla sola geometria. Tale metodo può essere applicato indistintamente sia a cricche bidimensionali che a cricche tridimensionali. In letteratura per le cricche bidimensionali esistono molteplici formulazioni in forma chiusa ottenute con diverse metodologie [3], tuttavia, per le cricche tridimensionali, il numero di soluzioni proposte è limitato. Infatti, in molti casi applicativi è usuale il ricorso a semplificazioni nella forma del difetto equiparandolo a forme geometriche relativamente semplici la cui soluzione sia già nota. Di solito, nella semplificazione il difetto è equiparato ad una cricca equivalente ellittica [4], mentre per simulare la fase di propagazione, il difetto è continuamente assimilato ad una successione di ellissi [5-7].

La funzione peso introdotta da Oore-Burns permette di valutare il valore dello SIF di cricche tridimensionali sollecitate a modo I indipendentemente dalla loro forma [8]. Tale funzione peso, pur non essendo a rigore l'esatta soluzione per il caso tridimensionale [9], ne rappresenta un'ottima approssimazione conservando tutte le caratteristiche tipiche delle funzioni peso discusse in

[10]. In particolare, nel caso di una ellisse di semiassi (1,b), quando l'eccentricità e tende a zero il contributo principale dell'integrale di Oore-Burns differisce dalla soluzione analitica di Irwin [11] di una quantità pari ad $e^2/20\sqrt{\pi}$. Il vantaggio offerto dall'integrale di Oore-Burns è quello di svincolarsi dalla forma di una cricca standard, per esempio ellittica, permettendo l'analisi dell'effetto delle variazioni di forma sul valore dello SIF in ogni punto del contorno della cricca. Purtroppo, le difficoltà connesse al calcolo analitico dell'integrale riportano l'utente verso la via numerica che, de resto, non è sempre agevole e priva di difficoltà per raggiungere la condizione di convergenza [12]. Tuttavia, va sottolineato che l'integrale di Oore-Burns è consigliato dalle norme ASM nel caso di cricche tridimensionali isolate per avere una stima sul valore dello SIF lungo tutto il profilo di una cricca reale [13].

E' quindi motivata la necessità di trovare una soluzione in forma chiusa per una rapida valutazione dello SIF di una cricca avente forma generica. Nel presente lavoro si è proposta una tecnica di tipo analitico per ottenere dall'integrale di Oore e Burns una soluzione esatta, nei limiti di una teoria del primo ordine, dello stress intensity factor di una cricca tridimensionale avente forma generica e sollecitata a trazione uniforme. Per ottenere il valore dello SIF lungo tutto il bordo della cricca sarà sufficiente conoscere lo sviluppo in serie del bordo stesso della cricca immaginato come una curva chiusa e regolare del piano. A titolo d'esempio, è mostrata un'applicazione del calcolo del coefficiente di forma relativo al computo dello SIF di piccoli difetti o inclusioni misurati in componenti meccanici ottenuti per fusione o saldatura.

LA FUNZIONE PESO DI OORE-BURNS

Oore and Burns in [8] proposero una funzione peso generalizzata $h(Q)$ per la valutazione dello SIF K_0 di modo I nel generico punto Q' del contorno $\partial\Omega$ di una cricca tridimensionale Ω sollecitata da una tensione normale σ :

P. Livieri

Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, via Saragat 1,
44122, Ferrara, Italy, lvp@unife.it ,

F. Segala

Dipartimento di Fisica, Università di Ferrara, via Saragat 1,
44122, Ferrara, Italy, segala@unife.it

$$K_o(Q') = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\Omega} \frac{h(Q)\sigma(Q)}{|Q-Q'|^2} d\Omega, \quad Q' \in \partial\Omega \quad (1)$$

dove Q rappresenta il generico punto interno alla cricca Ω (vedere figura 1). La funzione $h(Q)$ è, definita come $1/\sqrt{f(Q)}$, dove:

$$f(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{ds}{|Q-P(s)|^2} \quad Q \in \Omega \quad (2)$$

essendo s la lunghezza d'arco misurata lungo $\partial\Omega$ a partire da un punto preso a riferimento lungo il contorno. L'integrale (2) è convergente e la prova è riportata nel riferimento bibliografico [14]. Inoltre, come ben noto, nel caso di una cricca circolare isolata, la funzione peso di Oore-Burns si riduce esattamente alla funzione peso analitica ottenuta da Galin e riportata da Tada et al. [15].

Quando Ω diventa una circonferenza, posto per semplicità, $\sigma \equiv 1$, gli integrali (1) e (2) possono essere calcolati in forma esplicita ottenendo, per una circonferenza di raggio \hat{R} , le equazioni (3) e (4):

$$f(Q) = \frac{2\pi\hat{R}}{\hat{R}^2 - |Q|^2} \quad (3)$$

$$K_o(Q') = \frac{2\sqrt{\hat{R}}}{\sqrt{\pi}} \quad (4)$$

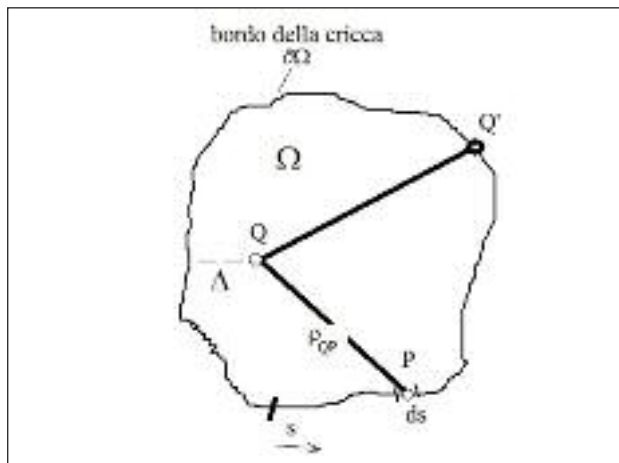


FIG. 1 Parametri nella funzione di Oore-Burns per cricche irregolari.

Oore-Burns irregular crack in an infinity solid under mode I loadings.

APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO ORDINE DELLA FUNZIONE PESO DI OORE-BURNS NEL CASO DI UN DIFETTO SOLLECITATO A TRAZIONE UNIFORME

Consideriamo ora una cricca tridimensionale Ω in un corpo infinito sollecitato a trazione il cui contorno $\partial\Omega$ possa essere descritto in un sistema polare (ρ, θ) nella forma: $\rho=R(\theta)$ dove R è una funzione regolare dell'angolo polare θ (vedere figura 2). La trasformazione della circonferenza di riferimento di raggio a nella cricca $\partial\Omega$, può essere fatta considerando una omotopia F tra una circonferenza di riferimento e $\partial\Omega$, continua nel complesso delle due variabili (ϵ, ψ) , tale che $F(0, \theta) = a$ e $F(1, \theta) = \partial\Omega(\theta)$. Senza perdere nella generalità del procedimento, possiamo considerare $\sigma(\Omega) \equiv 1$ e posto $Q=(x,y)$ dalle equazioni (1) e (2) si ha

$$K_o(Q') = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\Omega} \frac{h(x,y)}{(x-R(\alpha)\cos\alpha)^2 + (y-R(\alpha)\sin\alpha)^2} dx dy \quad (5)$$

dove $Q' = (R(\alpha)\cos\alpha, R(\alpha)\sin\alpha)$ mentre la funzione $R(\alpha)$ descrive $\partial\Omega$ in un sistema di coordinate polari. Considerando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = u R(\psi) \\ y = v R(\psi) \end{cases} \quad (6)$$

con $\text{tg}\psi = v/u$, si ha

$$dx dy = (R^2 + R \frac{dR}{d\psi} (u,v)) \cdot \text{grad} \psi du dv = R^2 du dv \quad (7)$$

Ritornando per semplicità alle variabili (x,y) lo SIF nel punto Q' diventa

$$K_o(Q') = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\Omega} \frac{h(R(\psi)(x,y)) R^2(\psi)}{|R(\psi)(x,y) - R(\alpha)(\cos\alpha, \sin\alpha)|^2} dx dy \quad (8)$$

Sulla base della omotopia F , possiamo leggere il contorno $\partial\Omega$ di una cricca come distorsione di una circonferenza di riferimento di raggio unitario. Consideriamo ora una funzione positiva continua $R(\epsilon, \psi)$ continua e di classe C^1 a tratti in ψ e di classe C^2 rispetto ad ϵ con $0 \leq \epsilon \leq 1$, mentre $0 \leq \psi \leq 2\pi$ e tale che

$$R(0, \psi) = 1 \quad (9)$$

(la (9) indica che la circonferenza di riferimento di raggio a è assunta, per il momento, unitaria). Espandendo in serie di Taylor le espressioni (4) e (9) si ha

$$R(\epsilon, \psi) = 1 + \epsilon S(\psi) \text{ termini di grado superiore in } \epsilon \quad (10)$$

$$K_o(\epsilon, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \epsilon \frac{\partial K_o}{\partial \epsilon}(0, \alpha) + O(\epsilon^2) \quad (11)$$

con $S(\psi) = (\partial R / \partial \epsilon)$ calcolata in $(0, \psi)$.

Infine, il calcolo di $(\partial K_o / \partial \epsilon)$ in $(0, \alpha)$ può essere effettuato, tenendo conto che:

$$\frac{\partial K_o}{\partial \epsilon}(\epsilon, \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\Omega} \left[\frac{\frac{\partial h}{\partial \epsilon} - \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \frac{\partial h}{\partial R} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \frac{\partial h}{\partial R} \frac{R^2}{|R(\psi)(x,y) - R(\alpha)(\cos\alpha, \sin\alpha)|^2} - \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \frac{\partial h}{\partial R} \frac{R^2}{|R(\psi)(x,y) - R(\alpha)(\cos\alpha, \sin\alpha)|^2} \right] dx dy \quad (12)$$

(per maggiori dettagli si rimanda al riferimento bibliografico [16]). Precisamente, la derivata (12) può essere calcolata in termini di serie di Fourier con metodi di analisi complessa che permettono di ottenere dalle equazioni (11) e (12) la seguente formulazione dello SIF in funzione dell'angolo polare α visto dal centro del sistema di riferimento (vedere figura 2)

$$K_1(\epsilon, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n e^{in\alpha} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (13)$$

dove a_n sono i coefficienti di Fourier di S , mentre gli E_n , ottenuti risolvendo la (12), sono dei coefficienti numerici calcolabili in forma esplicita ed indipendenti dalla omotopia F considerata (nella eq. (13) l'approssimazione al primo ordine dell'integrale di Oore-Burns è stata indicata con K_1).

Rimuovendo ora l'ipotesi di circonferenza di riferimento unitaria, indicato con a il raggio della circonferenza di riferimento, per una tensione uniforme di trazione, si ottiene

$$K_1(\alpha) = \frac{2\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n E_n e^{in\alpha} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (14)$$

dove i b_n sono i coefficienti di Fourier del contorno $\partial\Omega/a$ della cricca.

La tabella 1 riporta i primi dodici coefficienti E_n calcolati analiticamente. La stessa tabella, inoltre, mostra i coefficienti E_n calcolati da Gao e Rice [17] applicando, alla soluzione di Gallin [15] (valida per il solo cerchio) il metodo variazionale proposto da

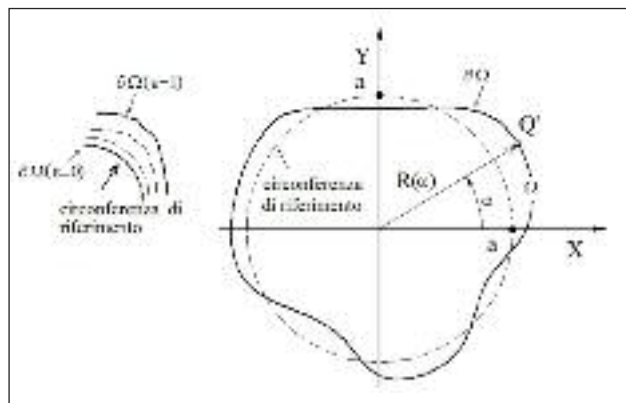


FIG. 2 *Cricca e circonferenza di riferimento.*
Reference crack: perturbation of the circular flaw.

Rice [18] alcuni anni prima. A parte i primi due coefficienti ($n=0$ e $n=1$), i valori di E_n appaiono diversi e ciò porta ad una maggiore precisione nel calcolo dello SIF da parte della (14) rispetto al metodo di Gao-Rice proprio quando la distorsione del bordo cricca $\partial\Omega$ tende ad allontanarsi dalla forma circolare [16].

VERIFICA DELLA FORMULAZIONE PROPOSTA

Allo scopo di verificare l'equazione (14) di seguito saranno esaminati tre casi di cricche convesse sollecitate a trazione semplice il cui lo SIF è già stato analizzato in letteratura lungo tutto il bordo cricca con l'ausilio di tecniche analitiche o numeriche. Il primo caso riguarda una cricca ellittica di semiassi (a, b), che come ben noto, è stato risolto analiticamente da Irwin [11] in funzione dell'integrale ellittico di seconda specie $E(k)$:

$$K_{Irwin}(\beta) = \frac{\sigma \sqrt{\pi b}}{E(k)} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} \quad (15)$$

dove

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha, \quad k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

La figura 3, confronta la soluzione di Irwin con i risultati conseguiti con l'equazione (14) per un rapporto b/a uguale a 0.6. L'errore medio è nell'ordine del 1.4 % sicuramente accettabile per una soluzione approssimata al primo ordine.

Gli altri due casi riguardano rispettivamente una cricca di forma quadrata ed una di forma triangolare. Entrambi i casi sono stati considerati in letteratura da Mastrojannis et al. [19] e risolti numericamente. Le figure 4 e 5 riportano il confronto fra la soluzione di Mastrojannis et al. [19] e l'equazione (14). La differenza mediata su tutto il perimetro del quadrato è nell'ordine del 4%, mentre si porta a circa il 10% nel caso del triangolo. Tuttavia, la differenza nella previsione del massimo valore dello SIF risulta inferiore agli errori medi calcolati per entrambi i casi. La differenza nella previsione del massimo SIF è del 1.5% per il qua-

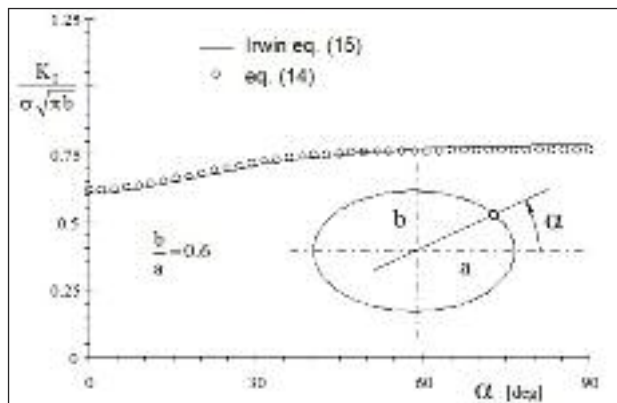


FIG. 3 *Confronto fra la soluzione di Irwin [11] e l'equazione (14) per una cricca ellittica di semiassi (a, b) sollecitata ad trazione uniforme σ .*
Comparison in SIF predictions of elliptical cracks of semi-axis (a, b) along the whole crack front (σ : tensile stress).

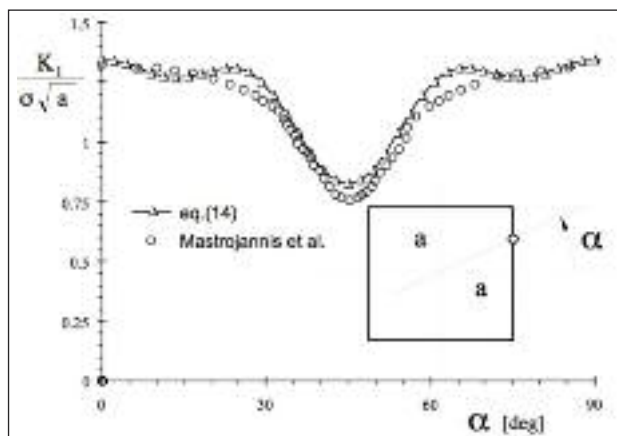


Fig. 4 *Confronto fra la soluzione numerica di Mastrojannis et al. [19] e l'equazione (14) per una cricca quadrata di lato pari ad $2a$ sollecitata a trazione uniforme σ .*
Comparison between Eqs. (14) and results of Mastrojannis et al. [19] for a square flaw (σ : tensile stress).

drato, mentre, è del 6% per il triangolo. Va comunque sottolineato che nelle simulazioni di Mastrojannis et al. [19] gli apici dei poligoni erano arrotondati con valori del raggio di raccordo di circa un decimo rispetto alla lunghezza del lato.

CALCOLO DELLO STRESS INTENSITY FACTOR IN MATERIALI DIFETTATI

Spinti dalla necessità di ottenere una stima del limite di fatica

TAB. 1
Coefficienti E_n ($E_n = E_{-n}$).
En Coefficients ($E_n = E_{-n}$).

n	E_n nella eq. (13)	E_n Gao-Rice [17]	n	E_n nella eq. (13)	E_n Gao-Rice [17]
0	1/2	1/2	6	-1.58042	-2.5
1	0	0	7	-1.81911	-3
2	-0.4	-0.5	8	-2.04377	-3.5
3	-0.74286	-1	9	-2.2566	-4
4	-1.04762	-1.5	10	-2.45929	-4.5
5	-1.32468	-2	11	-2.65318	-5

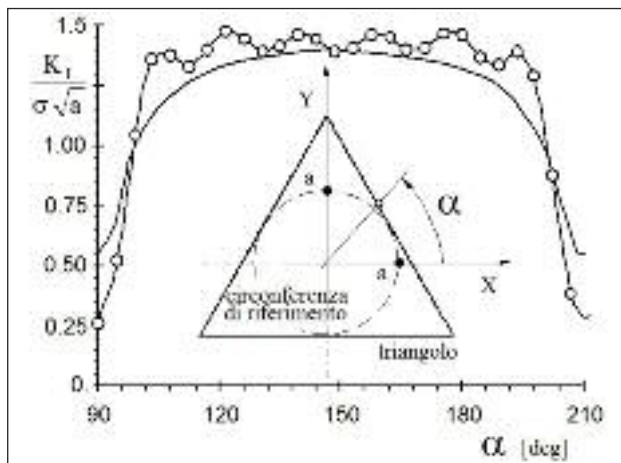


FIG. 5 Confronto fra la soluzione numerica di Mastrojannis et al. [19] e l'equazione (14) per una cricca triangolare di lato pari ad $2a$ sollecitata a trazione uniforme σ .

Comparison between Eqs. (14) and the results of Mastrojannis et al. [19] for a triangular flaw (σ : tensile stress).

per piccole cricche o difetti sollecitati da un campo di tensione uniforme, Murakami and Endo [20, 21] proposero la $\sqrt[4]{\text{area}}$ come parametro empirico per stimare il massimo valore dello SIF di una cricca a forma convessa. Sulla base di numerose analisi numeriche Murakami e Nemat-Nasser proposero una relazione di sintesi per il valore massimo dello SIF di cricche superficiali nella forma: $K_{I,max} = Y\sigma\sqrt{\pi\sqrt{\text{area}}}$ dove Y è un fattore di forma adimensionale che assume il valore di 0.629 per le cricche laterali [21]. Nel caso di cricche interne il valore di Y viene approssimato a 0.5 [22].

A titolo di esempio la figura 6 mostra l'andamento dello SIF nel caso di una cricca non-convessa. Lo SIF, in forma adimensionale, oscilla da circa 0.5 ($\alpha=0$) a circa 0.75 ($\alpha=45^\circ$).

Come esempio di applicazione della teoria proposta si calcoleranno, nel seguito, gli SIF di piccole cricche o difetti misurati in comuni getti o in saldature ad arco.

La figura 7 riporta sei micrografie di difetti presenti in getti di alluminio (a-b) in getti di ghisa grigia G300 (c-d) e in saldature in lega di alluminio 5083-H3 (e-f). Ogni difetto è stato interpolato discretizzando il contorno con un numero adeguato di punti in modo da poter calcolare con sufficiente precisione i coefficienti di Fourier del contorno. Il coefficiente Y , come riportato in figura, varia da 0.53 a 0.80 e fa riferimento alla circonferenza circoscritta al difetto.

Per quando riguarda, invece, l'influenza dello SIF sulla resistenza a fatica del componente meccanico, oltre ad utilizzare i metodi specifici messi a punto, ad esempio, da Murakami e Endo

[20,22], è possibile far riferimento al metodo della tensione media di Neuber opportunamente interpretato. Nel riferimento bibliografico [24] il metodo di Neuber è stato applicato in modo da considerare il rapporto fra la dimensione della zona di processo (zona in cui nuclea la cricca per fatica) in relazione alle dimensioni assolute del difetto (identificabile con la circonferenza di riferimento). Ne risulta, che il limite di fatica del componente difettato, oltre che dipendere dalle caratteristiche di resistenza a fatica del materiale base, dipende anche dal rapporto fra il parametro microstrutturale a_0 di El Haddad et al. [23] e le dimensioni assolute del difetto stesso. Il parametro a_0 è definito matematicamente nel seguente modo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_0} \right)^2 \quad (16)$$

dove σ_0 è il limite di fatica del materiale base mentre ΔK_{th} è il valore di soglia dello stress intensity factor al di sotto del quale non si ha propagazione del difetto. Con riferimento al metodo della tensione media lungo la direzione di propagazione del difetto, in [24] è stata proposta una sintesi del diagramma di Kitagawa e Takahashi [25] riportato in figura (8). Al diminuire delle dimensioni assolute del difetto, la resistenza a fatica del componente criccato, tende alla resistenza a fatica del materiale base senza difetti. Il valore massimo dello SIF è di solito espresso nella forma $K_{I,max} = Y_a \sigma \sqrt{\pi a}$ dove Y_a è il coefficiente di forma riferito al raggio della circonferenza circoscritta di raggio a . Concludendo, per un componente meccanico difettato, misurato il contorno del difetto, con l'equazione (14) è possibile determinare il valore massimo del coefficiente di forma Y_a per poi successivamente stimare, con il diagramma di Kitagawa e Takahashi [25], il limite a fatica del componente, che sulla base del metodo della tensione media di Neuber, risulta così formulato [24]:

$$\frac{\Delta \sigma_a}{\Delta \sigma_0} = \begin{cases} Y_a \sqrt{\frac{a}{a_0}} & \text{quando } a \geq \frac{4a_0}{Y_a^2} \\ \left(\frac{Y_a^2 a}{4a_0} + 1 \right) & \text{quando } a < \frac{4a_0}{Y_a^2} \end{cases} \quad (17)$$

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro, è stata proposta un'equazione in forma chiusa per il calcolo dello stress intensity factor (SIF) in cricche tridimensionali sollecitate a trazione, che permette di calcolare, nei limiti di una teoria del primo ordine, lo SIF lungo tutto il bordo della cricca. La precisione nel calcolo dello SIF è tanto maggiore quanto minore è la distorsione del difetto rispetto alla forma circolare. Il confronto con casi noti di letteratura ha portato a differenze sulla valutazione del valore massimo dello SIF variabili dal 1 al 6%. L'applicazione dell'equazione proposta permette di calcolare in modo relativamente semplice il valore mas-

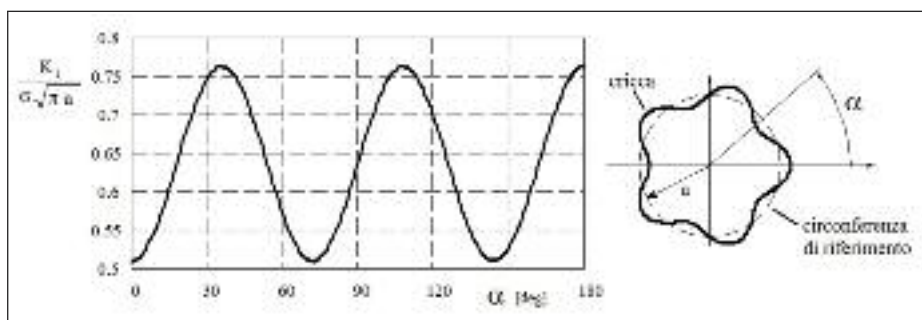


FIG. 6 Stress Intensity Factor K_I lungo il fronte di una cricca non convessa

Stress intensity factor for a like-sinusoidal flaw by means of Eq.(14) (σ : tensile stress).

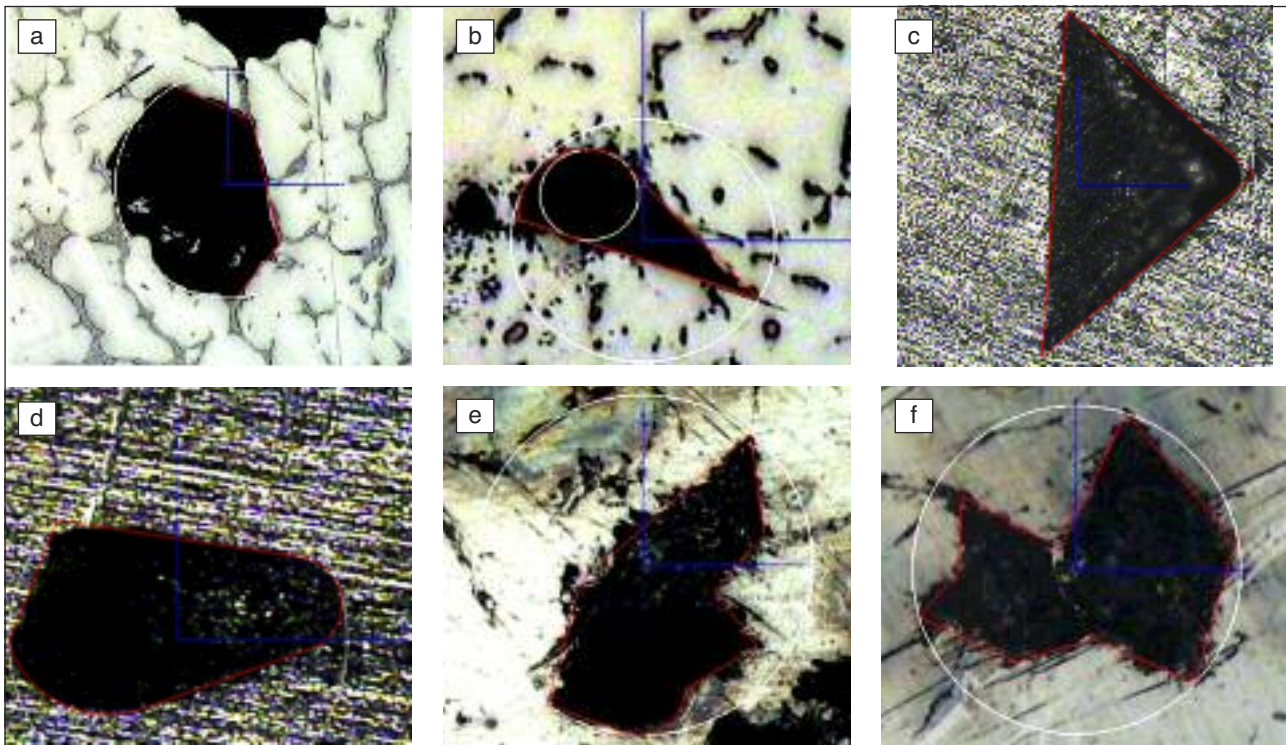


FIG. 7 *Calcolo del coefficiente Y per la valutazione del massimo valore dello stress intensity factor K_I lungo il bordo di una cricca non convessa (d: diametro circonferenza circoscritta):*
 a) getto in lega di alluminio, $d=212 \mu\text{m}$, $Y=0.53$; b) getto in lega di alluminio, $d=107 \mu\text{m}$, $Y=0.80$; c) saldatura in lega di alluminio 5083-H3 $d=318 \mu\text{m}$, $Y=0.56$; d) saldatura in lega di alluminio 5083-H3 $d=148 \mu\text{m}$, $Y=0.54$; e) fusione in ghisa grigia G300, $d=104 \mu\text{m}$, $Y=0.63$; f) fusione in ghisa grigia G300 $d=95 \mu\text{m}$, $Y=0.72$.

Evaluation of shape factor Y related to the maximum stress intensity factor K_I along the crack border (d: reference circle diameter):

a) aluminium cast alloy, $d=212 \mu\text{m}$, $Y=0.53$; b) aluminium cast alloy, $d=107 \mu\text{m}$, $Y=0.80$; c) fillet weld made of aluminium alloy 5083-H3 $d=318 \mu\text{m}$, $Y=0.56$; d) fillet weld made of aluminium alloy 5083-H3 $d=148 \mu\text{m}$, $Y=0.54$; e) gray cast iron G300, $d=104 \mu\text{m}$, $Y=0.63$; f) gray cast iron G300 $d=95 \mu\text{m}$, $Y=0.72$.

simo dello SIF di piccoli difetti o inclusioni in relazione al parametro $4\sqrt{\text{area}}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bueckner, H.F., A novel principle for the computation of stress intensity factors, ZAMM 50, 1970, 529-546
- [2] Rice, J.R., Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis. ASTM STP1020, R.P. Wei and R.P. Gangloff, Eds. Philadelphia, American Society for Testing and Materials, 1989, 29-57
- [3] Fett T. Munz D., Stress intensity factors and weight functions, Computational Mechanics Publications (1997)
- [4] Hobbacher, A. (1995), Recommendation on fatigue of welded components, IIW Document XIII-1539-95/ XV-845-95
- [5] Gurney T.R., The fatigue strength of transverse fillet welded joints. Abington Publishing, Abington, Cambridge, (1991)
- [6] Maddox S.J., The effect of plate thickness on the fatigue strength of fillet welded joints. Abington Publishing, Abington, Cambridge, (1987)
- [7] P. Livieri, P. Lazzarin: "Sulla propagazione di cricche semiellittiche in piastre soggette a gradienti di tensione nello spessore", XXVIII Conv. Naz. AIAS., Vicenza, Settembre 1999, pp. 303-312
- [8] Oore M., Burns D.J., (1980) Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields. Journal of Pressure Vessel Technology ASME, 102, 202-211
- [9] Livieri P., Segala F., Ascenzi O. (2005), Analytic evaluation of the difference between Oore-Burns and Irwin stress intensity factor for elliptical cracks, Acta Mechanica, 176 (1-2), 95-105
- [10] Beghini M., Bertini L., Vitale E., A numerical approach for deter-

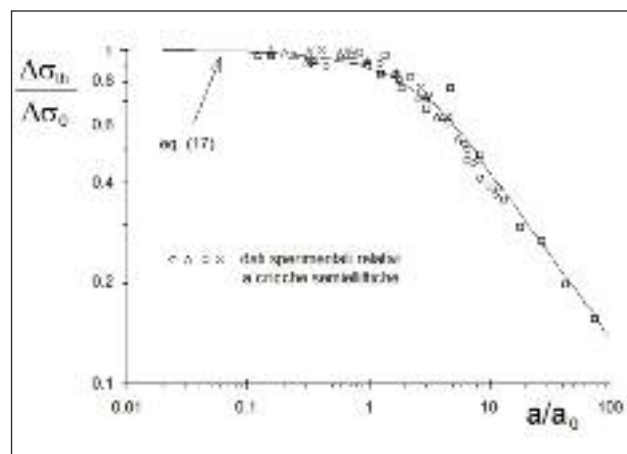


Fig. 8 *Diagramma di Kitagawa e Takahashi [25] (per maggiori dettagli sui dati sperimentali si consulti il riferimento bibliografico [24]).*

Kitagawa e Takahashi [25] diagram (for experimental details see data in reference [24]).

- mining weight functions in fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, (1991), pp. 395-607,
- [11] Irwin, G.R., (1962). Crack-extension force for a part-through crack in a plate. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 651-654
- [12] Desjardins J.L., Burns D.J., Thompson J.C., (1991). A weight function technique for estimating stress intensity factors for cracks in high pressure, *Journal of pressure Vessel Technology*, ASME, 113, 10-21
- [13] ASM Handbook, 1996. Fatigue and Fracture. Vol 19, ASM international
- [14] Ascenzi, O., Pareschi, L., Segala, F., (2002). A precise computation of stress intensity factor on the front of a convex planar crack. *International Journal for numerical methods in Engineering* 54, 241-261.
- [15] Tada, H., Paris, C.P., Irwin, G.R., (2000). *The stress analysis of cracks handbook*. Third edition, ASME press.
- [16] Livieri, P. Segala, F. First order Oore-Burns integral for nearly circular cracks under uniform tensile loading. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 47, Issue 9, 1 May 2010, Pages 1167-1176
- [17] Gao, H., Rice, J.R., (1987). Somewhat circular tensile cracks. *International Journal of Fracture* 33, 155-174
- [18] Rice, J.R., (1985). First order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *ASME Journal of Applied Mechanics* 52, 571-579
- [19] Mastrojannis E.N., Keer L.M., Mura T. (1979), Stress intensity factor for a plane crack under normal pressure, *International Journal of Fracture*, 15 (3), 247-258
- [20] Murakami Y., M. Endo (1983 a), Quantitative evaluation of fatigue strength of metal containing various small defects or cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 17 (1), 1-15
- [21] Murakami Y., Nemat-Nasser S. (1983 b), Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape. *Engineering Fracture Mechanics*, 17 (3), 193-210
- [22] Murakami Y, (2002). *Metal Fatigue: Effects of small defects and non-metallic inclusions*, Elsevier
- [23] El Haddad, M. H., Topper, T.H., Smith, K. N., (1979) Fatigue crack propagation of short cracks. *ASME, Journal of engineering Material and Technology* 101, 42-45
- [24] P. Livieri, R. Tovo, " Fatigue limit evaluation of notches, small cracks and defects: an engineering approach ", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27, 2004, pp. 1037-1049
- [25] Kitagawa, H., Takahashi, S. (1976) Applicability of fracture mechanics to very small cracks, or the cracks in the early stage. 2nd International Conference on Mechanical Behaviour of Materials, Boston, Mass, 627-631

Abstract

Closed form solution for the Stress Intensity Factor of small embedded cracks under tensile loading

Keywords: weight function, three-dimensional cracks, stress intensity factor, analytic solution

In this paper we present a closed-form solution for mode I Stress Intensity Factors (SIF) in three-dimensional planar flaws based on homotopic transformations of a disc. The SIF was evaluated under the hypothesis of an isolated crack under tensile loading. The solution is proposed in terms of Fourier series and the first order approximation of the coefficients is given in an explicit form. The results indicate that the proposed equation is very accurate when the flaw is a small deviation from a circle. Our solution is used to predict the SIF of many types of planar flaws and the results are compared with numerical predictions taken from scientific literature. Finally, different defects and inclusions are measured and the SIF is given for each point of on the crack border.